



## Vorbereitungsaufgaben

vorgeschlagen von Ivan Kokhanovsky / kritisch gelesen von Jonathan Gräfe

*Im Folgenden findest Du 5 Aufgaben zu unterschiedlichsten Gebieten der Astronomie und Astrophysik. Die ersten drei Aufgaben ähneln dem Schwierigkeitsgrad der 1.Runde beziehungsweise der 2.Runde und erlauben daher alle möglichen Hilfsmittel. Die vierte Aufgabe bezieht sich auf die Theorie-Klausur, während die fünfte eine aus der DA-Klausur der 3.Runde (Finalrunde) darstellt. In dieser Runde wird die Bearbeitung per Videokonferenz überwacht, sodass ausschließlich die bei der IOAA zugelassenen Hilfsmittel (Taschenrechner, Zeichengeräte) verwendet werden dürfen. Mehr Info zum Ablauf des aktuellen Auswahlverfahrens findest Du auf unserer Webseite unter <https://ioaa-germany.de/>. Sollten im Verlaufe der Vorbereitung Fragen auftauchen, können diese per Mail an [info@ioaa-germany.de](mailto:info@ioaa-germany.de) gestellt werden.*

*Viel Spaß und Erfolg!*

## Physikalische und Astronomische Konstanten

Gravitationskonstante	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Plancksches Wirkungsquantum	$h = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Boltzmann-Konstante	$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Lichtgeschwindigkeit in Vakuum	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Hubble-Konstante	$H_0 = 67.8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Elektrische Permittivität des Vakuums	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Magnetische Permeabilität des Vakuums	$\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
Elementarladung	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Elektronenmasse	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Jansky	$1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$
Astronomische Einheit	$1 \text{ au} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$
Parsec	$1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ au}$
Masse der Erde	$M_{\oplus} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$
Radius der Erde	$R_{\oplus} = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
Masse des Mondes	$M_{\zeta} = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$
Radius des Mondes	$R_{\zeta} = 1.74 \times 10^6 \text{ m}$
Mittlere sphärische Albedo der Erde	0.37
Mittlere sphärische Albedo des Mondes	0.07
Umlaufperiode des Mondes	27.30 Tage
Neigung der Ekliptik zum Erdäquator	$23^\circ 27'$
Länge des tropischen Jahres	365.24 mittlere Sonnentage
Länge des siderischen Jahres	365.26 mittlere Sonnentage
Große Halbachse des Merkurs	$a_{\text{♿}} = 0.39 \text{ au}$
Große Halbachse der Venus	$a_{\text{♀}} = 0.72 \text{ au}$
Große Halbachse des Marses	$a_{\text{♂}} = 1.52 \text{ au}$
Große Halbachse des Jupiters	$a_{\text{♃}} = 5.20 \text{ au}$
Große Halbachse des Saturns	$a_{\text{♄}} = 9.58 \text{ au}$
Radius des Jupiters	$R_{\text{♃}} = 6.99 \times 10^7 \text{ m}$
Radius des Saturns	$R_{\text{♄}} = 5.82 \times 10^7 \text{ m}$
Mittlere sphärische Albedo der Venus	0.76
Masse der Sonne	$\mathcal{M}_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Radius der Sonne	$R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Oberflächentemperatur der Sonne	$T_{\odot} = 5770 \text{ K}$
Leuchtkraft der Sonne	$L_{\odot} = 3.83 \times 10^{26} \text{ W}$
Absolute Helligkeit der Sonne im V	$4.83^{\text{m}}$
Bolometrische Korrektur der Sonne (BC)	$-0.09^{\text{m}}$

## Aufgabe 1 Meteorschauer

Täglich legt unsere Erde eine große Strecke durch den Weltraum zurück und sammelt dabei mehrere Tonnen Staub auf. Beim Eindringen in die Erdatmosphäre erhitzen sich die extraterrestrischen Körper so stark, dass die umgebenden Luftmoleküle dadurch ionisiert werden können. Diese kurzlebigen Leuchtphanomene bezeichnet man als Meteore. Die Leuchtspuren, die die Meteore auf ihrem Weg hinterlassen, sind in der Tat die Plasmaschweif, welche mittels niederfrequentem Radar sichtbar gemacht werden können. Empfangen werden dabei nur diejenigen Radiosignale, welche von dem Plasmaschweif reflektiert wurden.

- 1.1 Berechne die minimale Elektronendichte im Plasmaschweif, damit eine typische Frequenz des Radars von 140 MHz an ihm reflektiert wird. *Stichwort:* Plasmafrequenz.

Um den Meteor detektieren zu können, benötigt man sowohl eine Sende- als auch eine Empfangseinheit. Nimm an, ein Meteor bewegt sich entlang einer Geraden der Neigung von  $45^\circ$  zur Erdoberfläche. Dieser Pfad liegt in der Ebene, die senkrecht zur Erdoberfläche steht und die Verbindungslinie Sendeeinheit-Empfangseinheit enthält. Der Abstand zwischen zwei Einheiten beträgt 150 km. Das Signal benötigte von der Sende- bis zur Empfangseinheit die Zeit  $\delta t = 1$  ms.

- 1.2 Wenn der Meteor die Erdoberfläche erreichen würde, wie weit entfernt von der Empfangseinheit könnte man ihn finden? Gib außerdem die Höhe des Meteors zu dem Zeitpunkt an, als er detektiert wurde. Vernachlässige die Krümmung der Erdoberfläche und die Änderung der optischen Dichte in der Erdatmosphäre.

## Aufgabe 2 Astro-Jagd

Ein Astronom auf dem Breitengrad  $\phi$  beobachtet am 21. März genau um Mitternacht einen ‘‘Stern 1’’ am Himmelsäquator. ‘‘Stern 1’’ passiert das Blickfeld seines Teleskops innerhalb von  $t_1$ . Danach richtet er umgehend sein Gerät ins Zenit und schaut sich einen anderen ‘‘Stern 2’’ an, der das Blickfeld unter den gleichen Bedingungen innerhalb von  $t_2$  durchquerte.

2. Bestimme  $\phi$ , falls  $t_2 = 2t_1$  gilt. Kann der ‘‘Stern 2’’ ein Planet sein? Wie lange bleibt ‘‘Stern 2’’ noch über dem Horizont?

## Aufgabe 3 Schau doch mal genauer hin

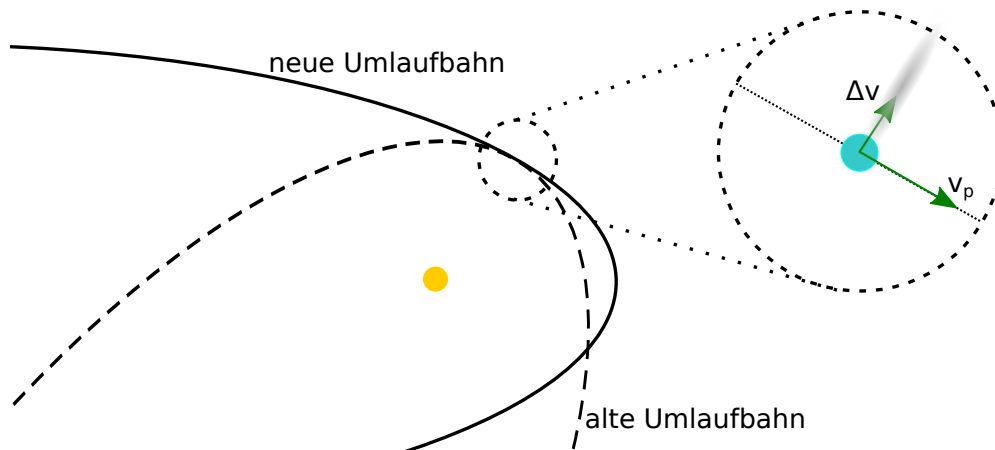
Ein Stern der scheinbaren Helligkeit im visuellen Band von  $8^m$  und mit einer jährlichen Parallaxe  $p = 0.01''$  erweist sich bei näherer Untersuchung mit einem Weltraumteleskop als ein Doppelstern bestehend aus zwei völlig gleichartigen Komponenten der Masse  $2M_\odot$  mit einer Umlaufperiode von  $P = 4$  Jahren. Die Umlaufbahn ist kreisförmig und liegt in der Bildebene von der Erde aus gesehen.

- 3.1 Berechne die scheinbare Helligkeit in Magnituden von jedem der Sterne getrennt.
- 3.2 Wie sieht dieser Doppelstern im Blickfeld eines kleinen optischen Teleskops auf der Erde mit einer Öffnung von  $D = 12$  cm aus?

## Aufgabe 4 Verdampft nochmal

Ein Komet der Masse  $M_{\text{Komet}} = 10^{13}$  kg besteht überwiegend aus Eis  $\rho_{\text{Eis}} = 900$  kg/m<sup>3</sup> (Albedo = 0.9, spezifische Schmelzwärme  $\lambda = 330$  kJ kg<sup>-1</sup>, spezifische Verdampfungswärme  $Q = 2.26$  MJ kg<sup>-1</sup>) und durchläuft seine exzentrische Bahn mit  $e = 0.95$  innerhalb von  $P = 27$  Jahren um die Sonne. Durch die Erwärmung von der Sonne wird das Eis sublimiert (direkter Übergang vom festen zum gasförmigen Zustand). Die Gasschicht führt zur Entstehung einer Atmosphäre (für Kometen auch als Koma bekannt). Die sublimierte Masse des Eises enthält in geringer Menge Staubpartikel, die eine Staubhülle um den Kometenkern bilden.

- 4.1 Wie nah kommt der Komet der Sonne? Wie viel Strahlungsleistung pro Fläche wird an dieser Stelle empfangen?
- 4.2 Nach wie vielen Umläufen wird sein Radius um ungefähr 5% kleiner? Nimm an, dass die gesamte Masse des Kometen erhalten bleibt. *Anmerkung:* Berücksichtige aber dabei die Verringerung der effektiven Fläche, die den Strahlungsfluss von der Sonne abbekommt.
- 4.3 Die Staubpartikel sind etwa  $r_{\text{Staub}} = 1 \mu\text{m}$  groß, haben eine sehr kleine Albedo und ihre Dichte beträgt  $\rho_{\text{Staub}} = 1 \text{ g/cm}^3$ . Vergewissere dich, dass in diesem Fall der Strahlungsdruck der Sonne für die Bildung des Schweifs zuständig ist. *Hinweis:* Vergleiche  $F_{\text{Strahlung}}$  mit  $F_{\text{Gravitation}}$  im Perihelium.
- 4.4 Dadurch entsteht ein kegelförmiger Schweif der mittleren Dichte  $\rho_{\text{Schweif}} = 10^{-18} \text{ kg/m}^3$  mit einem Öffnungswinkel von  $4^\circ$ . Wie lang wird er sein, nachdem der Komet so viel Masse verloren hat wie in der vorherigen Teilaufgabe? Gehe davon aus, dass der Eiskern zu 1% aus Staub besteht. Die Verformung des Schweifs kann vernachlässigt werden.
- 4.5 Wenn der Komet im Perihelium gewesen ist, ist es durch die Erwärmung zu einem Riss in der äußeren Kruste des Kometenkerns gekommen, aus dem dann unter hohem Druck stehende Materie austreten konnte. Dabei hat der Komet eine zusätzliche Geschwindigkeit von  $\Delta v = 1 \text{ km s}^{-1}$  in radiale Richtung erhalten (siehe Skizze). Berechne die neue Umlaufperiode. Wie ändert sich dabei die Exzentrizität? *Hinweis:* Welche physikalische Größe bleibt nach dem Austreten erhalten?



## Aufgabe 5 Sternentstehung

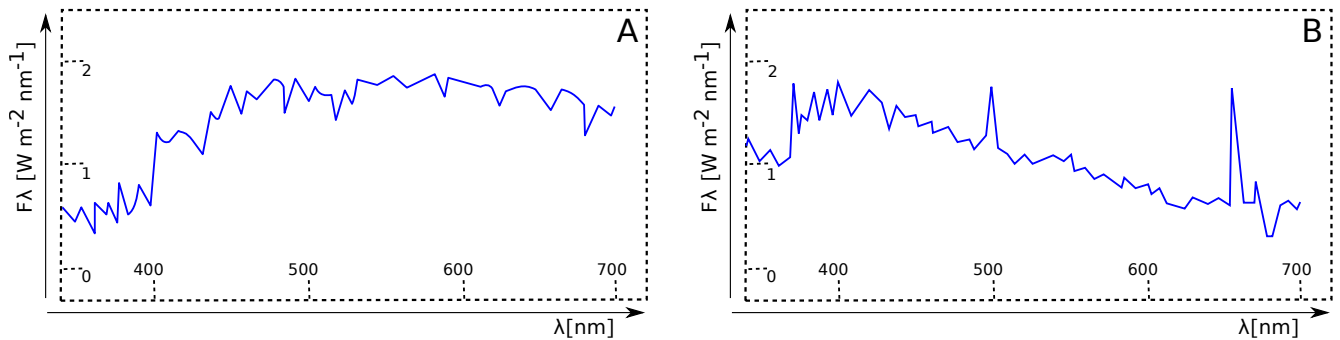
Unter der Sternbildungsrate (abgekürzt als SFR vom englischen Star Formation Rate) versteht man den zeitlichen Verlauf der Sternentstehung in einer Galaxie. Die Gesamtmasse der neugeborenen Sterne wird üblicherweise in Sonnenmassen pro Flächeneinheit innerhalb von einer Million Jahren angegeben,  $\dot{\Sigma}_{\text{SFR}}$  ( $M_{\odot} \text{pc}^{-2} \text{Myr}^{-1}$ ). Um SFR zu bestimmen, kann die Strahlung von  $O - B$  Spektralklassen gemessen werden, weil solche Sterne eine relativ kurze Lebensdauer haben. Da die Sterne aus Gaswolken entstehen, wird die Galaxieentwicklung durch die Flächendichte des Gases,  $\Sigma_{\text{Gas}}$  ( $M_{\odot} \text{pc}^{-2}$ ), bestimmt. Der überwiegende Anteil des Gases in der Scheibe besteht aus neutralem Wasserstoff. Die vorliegende Tabelle zeigt die gemessenen Daten in einer logarithmischen Skala für mehrere Galaxien.

- 5.1 Welcher Bereich des Spektrums einer Galaxie liefert Auskunft über  $\dot{\Sigma}_{\text{SFR}}$  beziehungsweise  $\Sigma_{\text{Gas}}$ ?
- Radioteleskop (um die 21 cm Linie)
  - UV-Teleskop (100 nm - 380 nm)
  - Gammateleskop (unter 0.01 nm)

Objekt	$\log(\Sigma_{\text{Gas}})$	$\log(\dot{\Sigma}_{\text{SFR}})$
NGC 224	0.68	-3.37
NGC 253	2.60	1.00
NGC 598	1.03	-2.71
NGC 628	0.94	-3.08
NGC 660	2.91	0.86
NGC 3310	0.93	-2.79
NGC 4254	1.14	-2.31
NGC 4258	0.63	-3.12
NGC 4402	1.52	-2.17
NGC 4639	0.25	-3.79

5.2 Zeichne  $\log(\dot{\Sigma}_{\text{SFR}})$  gegen  $\log(\Sigma_{\text{Gas}})$ . Achte dabei auf die übersichtliche Datendarstellung [1].

5.3 Einige Galaxien aus der Tabelle zeigen eine außergewöhnliche Sternbildungsrate (die sogenannten Sternenausbruchgalaxien). Markiere sie direkt auf dem Graph oder schreibe die NGC Nummer auf. Solche Galaxien, die einen Starburst in ihrer „jüngeren Vergangenheit“ hatten, kann man vor allem dadurch erkennen, dass sie viele A-Sterne enthalten. Auf dem unteren Bild sind zwei Spektren zu sehen: eines gehört zu einer Spiralgalaxie und das andere zu einer Galaxie nach einer Starburst-Phase (die Form der Spektren wurde von [2] übernommen). Ordne die Spektren ein.



5.4 Für die restlichen Galaxien (ohne Starburst) gilt laut dem Schmidt-Kennicutt-Gesetz folgender Zusammenhang

$$\dot{\Sigma}_{\text{SFR}} = \alpha \cdot (\Sigma_{\text{Gas}})^\beta$$

Bestimme die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  (ohne Fehlerrechnung). *Hinweis:* Es gilt:  $\log ax^b = \log a + b \cdot \log x$ .

5.5 Die Zeitskala, während der eine Galaxie mit der aktuellen Rate das gesamte Gas verbrauchen würde, nennt man auch Erschöpfungszeitraum,  $\tau$ . Gehe im Folgenden davon aus, dass die Sterne währenddessen kein neues Material einspritzen. Wie hängt  $\tau$  mit der Gesamtmasse des Gases in einer Galaxie zusammen?

## Lösungsvorschlag: Meteorschauer

Die Plasmafrequenz  $f$  hängt von der Elektronendichte  $n_e$  wie folgt ab

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}},$$

wobei  $e$  die Elementarladung,  $m_e$  die Elektronenmasse und  $\epsilon_0$  die elektrische Permittivität des Vakuums ist. Das Einsetzen von  $f = 140 \text{ MHz}$  liefert die minimal benötigte Elektronendichte für die Reflexion

$$n_e \leq 2.4 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}.$$

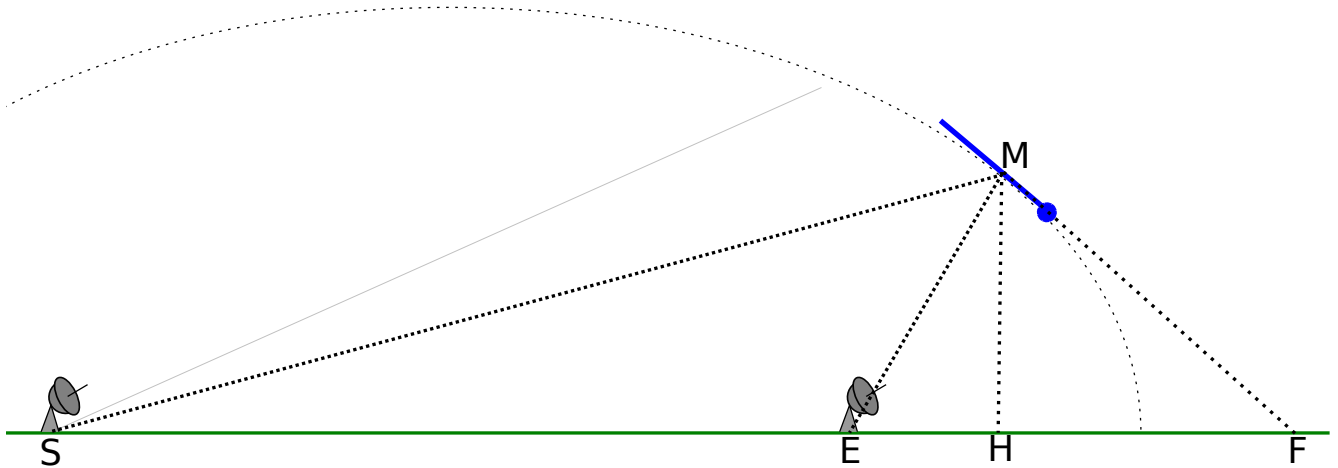


Abbildung 1: S - Sendeeinheit, E - Empfangseinheit, M - Meteorpfad, H - Projektion auf die Erdoberfläche, F - Einschlagsort.

Die Voraussetzung für die Detektion des Meteors ist auf der Skizze 1 dargestellt. Der Meteor bewegt sich entlang der blauen Strecke und wird im Punkt M vom Sender getroffen. Das Signal muss vom Plasmaschweif genau zum Empfänger reflektiert werden. Da die Lichtlaufzeit sich mit der Höhe nicht ändert, muss sich M auf einer Ellipse mit Brennpunkten S und E befinden, denn eine Ellipse hat die Eigenschaft, dass die Summe der Weglängen zu den Brennpunkten konstant ist. Außerdem wird ein im Brennpunkt S ausgehender Strahl in den Brennpunkt E reflektiert. Also muss die Bewegung des Meteors tangential zur Ellipse verlaufen. Die vom Signal zurückgelegte Strecke innerhalb von  $\delta t = 1 \text{ ms}$  beträgt

$$SM + ME = c \cdot \delta t = 300 \text{ km}.$$

Damit kann die große Halbachse der Ellipse ermittelt werden

$$2a = SM + ME = 300 \text{ km} \implies a = 150 \text{ km}.$$

Die Exzentrizität ergibt sich zu

$$e = \frac{SE}{2a} = 0.5.$$

Um die Steigung der Tangente zu bestimmen, muss man zunächst die Ellipsengleichung implizit differenzieren

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies y' = -\frac{xb^2}{ya^2} = -\frac{x(1-e^2)}{y} = -\frac{3x}{4y}.$$

Die Neigung der Bahn des Meteors beträgt  $45^\circ$  und somit folgt  $y' = 1$ . Daraus ergibt sich die Höhe bei der Detektion im Punkt  $M(x_0, y_0)$  durch Einsetzen in die Ellipsengleichung ( $b = a\sqrt{1-e^2} = \sqrt{3}a/2$ )

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{4y_0^2}{3a^2} = 1, \quad 4y_0 = \pm 3x_0 \implies H = y_0 = \frac{3a}{\sqrt{28}} \approx 85 \text{ km}.$$

Der Meteor sollte im Abstand

$$EF = x_0 + y_0 \tan 45^\circ \pm ae = x_0 + y_0 \pm \frac{a}{2} = \frac{7y_0}{3} \pm \frac{a}{2} = \frac{(\sqrt{7} \pm 1)a}{2} \approx 123 \text{ km oder } 273 \text{ km}$$

von der Empfangsstation auf die Erde treffen (zwei mögliche Lösungen, je nachdem auf welcher Seite der Meteorit herunterkommt).

## Lösungsvorschlag: Astro-Jagd

Die Geschwindigkeit durch das Blickfeld des Teleskops hängt von der Deklination,  $\delta$ , des jeweiligen Sterns ab

$$\omega = \omega_0 \cos \delta,$$

wobei  $\omega_0$  die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist. Aus der Annahme  $t_2 = 2t_1$  folgt unmittelbar

$$\cos \delta_1 = 2 \cos \delta_2.$$

Da sich "Stern 1" auf dem Himmelsäquator befindet, gilt  $\delta_1 = 0$  und somit  $\delta_2 = 60^\circ$ . Die Deklination des Sterns, der genau durch den Zenit geht, entspricht der Breite des Beobachters

$$\phi = \delta_2 = 60^\circ.$$

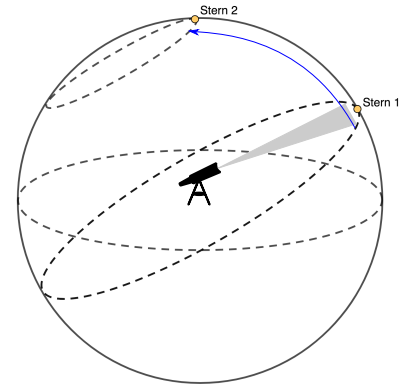
Am 21. März befindet sich die Sonne in der Nähe vom Frühlingspunkt,  $\alpha_\odot = 0^h$ . Um Mitternacht,  $t_\odot = 12^h$ , beträgt die Sternzeit

$$S = \alpha_\odot + t_\odot = 12^h.$$

Da der "Stern 2" zu diesem Zeitpunkt kulminiert,  $t = 0^h$ , beträgt seine Rektaszension  $\alpha_2 = 12^h$ . Offenbar sind die Koordinaten des zweiten "Sterns" ( $\alpha_2 = 12^h$ ,  $\delta_2 = 60^\circ$ ) weit von der Ekliptik entfernt. Deswegen kann dieses Objekt *kein* Planet sein. Darüber hinaus gilt

$$\delta_2 = 60^\circ > 45^\circ \implies \delta_2 > 90^\circ - \delta_2 = 90^\circ - \phi.$$

Darum ist der "Stern 2" zirkumpolar und bleibt *immer* über dem Horizont (siehe Skizze).



## Lösungsvorschlag: Schau mal doch genauer hin

Die Bestrahlungsstärke von beiden Komponenten ist doppelt so groß wie die der einzelnen Komponenten. Nach dem Gesetz von Pogson ist die visuelle Magnitude von jedem Stern getrennt gleich

$$m_V = m_{\Sigma, V} + 2.5 \log 2 = 8.75^m.$$

Nach dem dritten Gesetz von Kepler beträgt der Abstand zwischen den Sternen

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\Sigma} \implies a^3 [\text{au}] = T^2 [\text{Jahre}] \cdot \mathcal{M}_\Sigma [\mathcal{M}_\odot] \implies a = 4 \text{ au},$$

wobei  $\mathcal{M}_\Sigma = 4\mathcal{M}_\odot$  die Gesamtmasse ist. Damit ergibt sich der Winkelabstand zwischen den Sternen in der Bildebene

$$\theta_{\text{Doppelstern}} = pa = 0.04''.$$

Das Teleskop besitzt eine Winkelaufösung im visuellen Band

$$\theta_{\text{Teleskop}} = 1.22 \cdot \frac{\lambda_V}{D} = 1.15''$$

und damit kann man mit dem bloßen Auge die schwächste Magnitude von

$$m_{\max} = 6^m + 5 \log \left( \frac{D}{6 \text{ mm}} \right) = 12.51^m$$

beobachten. Da  $\theta_{\text{Teleskop}} > \theta_{\text{Doppelstern}}$  und  $m_{\max} > m_{\Sigma, V}$  erscheint dieser Doppelstern als *einzelner* Stern im Blickfeld des Teleskops. *Bemerkung:* Alternativ kann man behaupten, dass die Atmosphäre auf der Erde die Winkelauflösung auf  $1''$  begrenzt. Auch wenn der Durchmesser des Teleskops größer wäre, könnte man die Sterne nur außerhalb der Erde im optischen Band getrennt beobachten.

## Lösungsvorschlag: Verdampfthochmal

4.1 Aus der Periodendauer kann mithilfe des 3. Keplerschen Gesetzes die große Halbachse ermittelt werden:

$$\frac{a^3}{a_{\oplus}^3} = \frac{P^2}{P_{\oplus}^2} = 27^2 \implies a = 9 \text{ au.}$$

Der minimale Abstand im Perihelium ergibt sich zu

$$q = a(1 - e) = 0.45 \text{ au.}$$

Die Strahlungsleistung pro Fläche ist dann

$$E = \frac{L_{\odot}}{4\pi q^2} = E_{\oplus} \left( \frac{a_{\oplus}}{q} \right)^2 \approx 6.7 \times 10^3 \text{ W/m}^2.$$

4.2 Sei  $\Lambda$  die Summe aus spezifischer Schmelz- und Verdampfungswärme  $\Lambda = \lambda + Q = 2.59 \text{ MJ kg}^{-1}$ . Wir nehmen an, dass die Masse erhalten bleibt und sich die Umlaufbahn nicht verändert. Durch die Strahlung der Sonne sublimiert ein Teil des Eises und der Radius des Kerns verkleinert sich. Die absorbierte Energie pro Zeit ist gegeben durch

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r(t)^2} (1 - \alpha) \pi R_{\text{Komet}}^2,$$

dabei ist  $r(t)$  der Abstand Sonne-Komet zu einem gegebenen Zeitpunkt,  $\alpha = 0.9$  das Albedo des Kometen und  $R_{\text{Komet}}$  der Kometenradius. Für die pro Zeit sublimierte Kernmasse ergibt sich

$$\Lambda \cdot \frac{dM_{\text{Komet}}}{dt} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

und aus der Gleichung

$$M_{\text{Komet}} = V_{\text{Komet}} \rho_{\text{Eis}} = \frac{4\pi}{3} R_{\text{Komet}}^3 \rho_{\text{Eis}}$$

erhält man

$$\frac{dM_{\text{Komet}}}{dt} = 4\pi \rho_{\text{Eis}} R_{\text{Komet}}^2 \cdot \frac{dR_{\text{Komet}}}{dt} \implies 4\pi \Lambda \rho_{\text{Eis}} R_{\text{Komet}}^2 \cdot \frac{dR_{\text{Komet}}}{dt} = -\frac{L_{\odot}}{4\pi r(t)^2} (1 - \alpha) \pi R_{\text{Komet}}^2.$$

Wir betrachten nun anstelle der zeitlichen Änderung des Kernradius die Änderung mit dem Bahnwinkel,  $\dot{\phi} = d\phi/dt$

$$\frac{dR_{\text{Komet}}}{d\phi} \cdot \dot{\phi} = -\frac{L_{\odot}(1 - \alpha)}{16\pi \Lambda \rho_{\text{Eis}} r(t)^2}.$$

Nun ist aber  $M r^2 \dot{\phi} =: J$  gerade der Bahndrehimpuls des Kometen und dieser ist konstant gleich

$$J = M_{\text{Komet}} \sqrt{a(1 - e^2) G M_{\odot}}.$$



Man erhält

$$\frac{dR_{\text{Komet}}}{d\phi} = -\frac{L_{\odot}(1-\alpha)}{16\pi\Lambda\rho_{\text{Eis}}\sqrt{a(1-e^2)}GM_{\odot}} = \text{const.}$$

Der Radius nimmt also linear mit dem Winkel ab. Die Konstante ergibt sich zu 0.078 m.

$$0.05R_{\text{Komet}} = 0.078 \text{ m} \cdot \phi \implies \phi = \frac{0.05R_{\text{Komet}}}{0.078 \text{ m}} \approx 2\pi \times 141.$$

Der Radius wird nach 141 Umläufen um 5% kleiner. Dieser Prozess wird also eine Weile dauern, nämlich  $141 \times 27 \approx 3800$  Jahre, was aber wiederum auf astronomischer Skala nicht so erheblich lange erscheint.

4.3 Unter der Annahme, dass die Staubpartikel das Licht der Sonne vollständig absorbieren, ergibt sich die Kraft aufgrund des Strahlungsdrucks mithilfe des Impulsübertrags der Photonen

$$F_{\text{Strahlung}} = \frac{dp}{dt} = \frac{dN}{dt} \cdot \frac{E}{c} = \frac{L_{\odot}}{4\pi cr(t)^2} \cdot \pi r_{\text{Staub}}^2 = \frac{L_{\odot} r_{\text{Staub}}^2}{4cr(t)^2},$$

wobei  $r_{\text{Staub}} = 1 \mu\text{m}$  der Radius der Staubpartikel ist. Die Gravitationskraft von der Sonne ist gegeben durch

$$F_{\text{Gravitation}} = \frac{GM_{\odot}m_{\text{Staub}}}{r(t)^2} = \frac{GM_{\odot}\rho_{\text{Staub}}4\pi r_{\text{Staub}}^3}{3r(t)^2}.$$

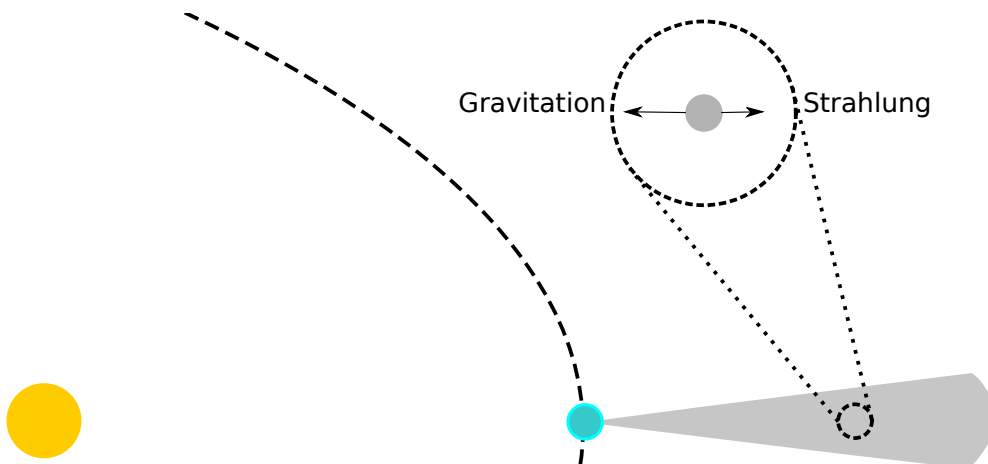
Daraus folgt

$$\frac{F_{\text{Strahlung}}}{F_{\text{Gravitation}}} = \frac{3L_{\odot}}{16\pi cGM_{\odot}\rho_{\text{Staub}}r_{\text{Staub}}} \approx 0.6.$$

Somit liegt der Strahlungsdruck in der gleichen Größenordnung wie die Gravitationskraft und ist daher für die Bildung des Schweifes verantwortlich. Wichtig ist noch zu zeigen, dass die Gravitationskraft vom Kometen sogar an dessen Oberfläche vernachlässigbar klein ist im Vergleich zu der von der Sonne, wenn der Komet im Perihelium ist (genau da erfolgt die Bildung des Schweifes)

$$\frac{F_{\text{Gravitation, } \odot}}{F_{\text{Gravitation, Komet}}} = \frac{M_{\odot}}{M_{\text{Komet}}} \cdot \left(\frac{R_{\text{Komet}}}{q}\right)^2 = 85 \gg 1.$$

Im Aphelium ist aber der Komet  $(1+e)/(1-e) = 39$  Mal weiter entfernt von der Sonne. Deswegen ist da die Gravitationskraft vom Kometen doch um  $39^2/85 \approx 18$  größer als die von der Sonne. Dadurch wird der Schweif kleiner oder verschwindet sogar komplett, wenn der Komet sich am Rand des Sonnensystems befindet.



4.4 1% der sublimierten Masse ist Staub, welcher den Schweif des Kometen formt. Die Schweifmasse

$$m_{\text{Schweif}} = 10^{-2} \times \rho_{\text{Eis}} \cdot \frac{4}{3}\pi (R_{\text{Komet}}^3 - 0.95^3 R_{\text{Komet}}^3) = 10^{-2} \times (1 - 0.95^3) M_{\text{Komet}} = 1.4 \times 10^{10} \text{ kg.}$$

Das Volumen eines Kegels mit Öffnungswinkel  $4^\circ$  ergibt sich in Abhängigkeit der Länge,  $l$ , zu

$$V_{\text{Schweif}} = \frac{1}{3}\pi l^3 \tan^2(4^\circ).$$

Dies muss gleich  $V_{\text{Schweif}} = M_{\text{Schweif}}/\rho_{\text{Schweif}}$  sein, also erhält man

$$l = \sqrt[3]{\frac{3M_{\text{Schweif}}}{\pi \tan^2(4^\circ)\rho_{\text{Schweif}}}} = 2.2 \times 10^{10} \text{ m} \approx 0.15 \text{ au.}$$

Der Schweif breitet sich also durch die Gegend über eine relativ große Strecke aus.

4.5 Da die Änderung der Geschwindigkeit nur in radiale Richtung erfolgt, bleibt der Drehimpuls erhalten. Die Energie ändert sich aber genau um  $\frac{1}{2}M_{\text{Komet}}\Delta v^2$ , da die ursprüngliche Geschwindigkeit im Perihelium senkrecht zur radialen Richtung gerichtet ist. Auf einer Keplerbahn gilt

$$a(1 - e^2) = \frac{(J/M_{\text{Komet}})^2}{GM_{\odot}} = \text{const.},$$

Die Gesamtenergie und den Drehimpuls kann man aus den ursprünglichen Werten berechnen. Nach dem Gasaustritt gilt

$$-\frac{GM_{\odot}}{2a'} = -\frac{GM_{\odot}}{2a} + \frac{\Delta v^2}{2} \quad \text{und} \quad a'(1 - e'^2) = a(1 - e^2).$$

Auflösen der beiden Gleichungen ergibt

$$a' = 9.09 \text{ au} \quad \text{und} \quad e' = 0.9505.$$

Die neue Umlaufperiode ist damit

$$P' = P \left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2} = 27.42 \text{ Jahre.}$$

## Lösungsvorschlag: Sternentstehung

5.1 *Antwort:*  $\Sigma_{\text{Gas}}$  - (i),  $\dot{\Sigma}_{\text{SFR}}$  - (ii). *Erklärung:* Beim Spin-Flip Übergang im Wasserstoffatom wird eine elektromagnetische Welle bei einer Wellenlänge von 21 cm abgestrahlt. O-B Sterne leuchten am stärksten im UV-Bereich.

5.2 Siehe Skizze.

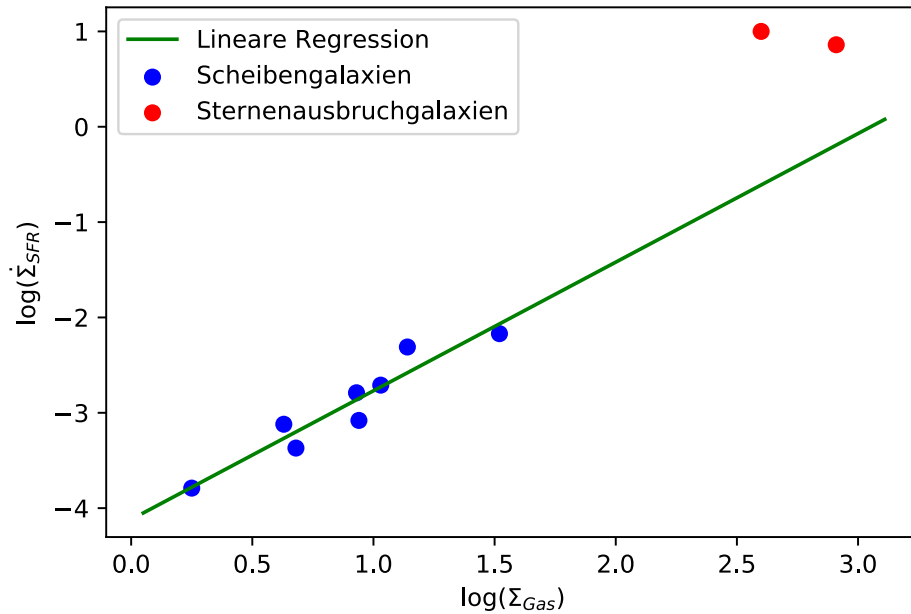
5.3 Auf dem Graph sieht man oben rechts zwei Galaxien, die eine erhöhte SFR aufweisen, nämlich NGC 253 und 660. Bei den Galaxienspektren handelt es sich um eine Mixtur verschiedener Sterne. Auf dem Hertzsprung-Russell Diagramm besitzen die A-Sterne eine große Temperatur und strahlen somit überwiegend laut dem Wienschen Verschiebungsgesetz im blauen Spektralbereich. In diesem Sinne unterschieden sich die beiden Spektren. *Antwort:* Spiralgalaxie - A, Starburst - B.

5.4 Es gilt

$$\log(\dot{\Sigma}_{\text{SFR}}) = \log \alpha + \beta \cdot \log(\Sigma_{\text{Gas}}).$$

Aus der Methode der kleinsten Quadrate (eine graphische Lösung ist auch in Ordnung) folgt

$$\beta = 1.35, \quad \alpha = 7.62 \times 10^{-5}$$



5.5 Die Zeit der Erschöpfung lässt sich folgendermaßen ausrechnen

$$\tau = \frac{\Sigma_{\text{Gas}}}{\dot{\Sigma}_{\text{SFR}}} = \alpha^{-1} (\Sigma_{\text{Gas}})^{1-\beta} \propto (\Sigma_{\text{Gas}})^{-0.35}$$

Daraus folgt, dass diejenigen Galaxien, die viel Gas erhalten, eher schneller alles verbrauchen als die, denen es an Gas mangelt.

## Literatur

- [1] M. R. Krumholz, A. Dekel und C. F. McKee. "A UNIVERSAL, LOCAL STAR FORMATION LAW IN GALACTIC CLOUDS, NEARBY GALAXIES, HIGH-REDSHIFT DISKS, AND STARBURSTS". In: *The Astrophysical Journal* 745.1 (Dez. 2011), S. 69. DOI: [10.1088/0004-637x/745/1/69](https://doi.org/10.1088/0004-637x/745/1/69) (siehe S. 5).
- [2] A. Weigert, H. J. Wendker und L. Wisotzki. *Astronomie und Astrophysik: Ein Grundkurs*. Wiley-VCH, Berlin, 2009. ISBN: 978-3-527-40793-4 (siehe S. 5).